MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE PARTIE

DURÉE : 2 heures

Soit $\mathfrak{M}$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients réels. On considère les quatre éléments $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, de $\mathfrak{M}$ suivants :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$ engendré par $\{\mathbf{e}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbf{H}$ seront désignés sous le nom de *quaternions*.

I

1° *a.* Déterminer la dimension de $\mathbf{H}$.

b. Calculer tous les produits de deux éléments, distincts ou confondus, de l'ensemble $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

En déduire que $\mathbf{H}$ est *stable* par le produit des matrices, c'est-à-dire que le produit de deux éléments de $\mathbf{H}$ est encore un élément de $\mathbf{H}$.

2° Pour tout quaternion $\mathbf{q} = x_0\,\mathbf{e} + x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$ avec x_0, x_1, x_2, x_3 réels, on définit le quaternion conjugué $\overline{\mathbf{q}}$ de $\mathbf{q}$ par la relation :

$$\overline{\mathbf{q}} = x_0\,\mathbf{e} - x_1\,\mathbf{i} - x_2\,\mathbf{j} - x_3\,\mathbf{k}\,.$$

a. Montrer que l'application de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}$ qui à tout quaternion associe son conjugué est $\mathbf{R}$-linéaire et inversible, et que l'on a pour tout couple $(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ de quaternions la relation $\overline{\mathbf{q}\,.\,\mathbf{q}'} = \overline{\mathbf{q}'}\,.\,\overline{\mathbf{q}}$.

b. Déterminer tous les quaternions $\mathbf{q} \in \mathbf{H}$ qui vérifient l'égalité $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$.

c. On appelle *quaternion pur* tout quaternion $\mathbf{p} \in \mathbf{H}$ vérifiant l'égalité $\overline{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}$. Soit P l'ensemble des quaternions purs. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbf{H}$ dont on donnera une base.

Montrer que tout quaternion $\mathbf{q} \in \mathbf{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\mathbf{q} = \mathrm{Re}(\mathbf{q})\,\mathbf{e} + \mathrm{Pu}(\mathbf{q})$, avec $\mathrm{Re}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{Pu}(\mathbf{q}) \in \mathrm{P}$. On dit alors que $\mathrm{Re}(\mathbf{q})$ est la *partie réelle* de $\mathbf{q}$ et $\mathrm{Pu}(\mathbf{q})$ sa *partie pure*.

Tournez la page S. V. P.

d. Montrer que l'application f de $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \mathrm{Re}(\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}')$ pour tout couple $(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ de quaternions est un produit scalaire euclidien sur $\mathbf{H}$, pour lequel la base $(\mathbf{e}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est orthonormée. Selon l'usage, on définit la *norme* $|\mathbf{q}|$ d'un quaternion quelconque $\mathbf{q}$ par $|\mathbf{q}| = \sqrt{f(\mathbf{q}, \mathbf{q})}$.

Pour tout couple $(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ de quaternions, calculer $|\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'|$ en fonction de $|\mathbf{q}|$ et $|\mathbf{q}'|$.

e. Montrer que tout quaternion non nul $\mathbf{q}$ admet un inverse $\mathbf{q}^{-1}$ que l'on calculera. Calculer $|\mathbf{q}^{-1}|$ en fonction de $|\mathbf{q}|$.

3° On munit l'espace vectoriel euclidien P des quaternions purs de l'orientation pour laquelle la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est directe. Soient $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ deux éléments de P. Calculer $\mathrm{Re}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')$ et $\mathrm{Pu}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')$ au moyen de $\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}'$ et $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$ (où $\mathbf{p} \bullet \mathbf{p}' = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ est le produit scalaire et $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$ est le produit vectoriel de $\mathbf{p}$ par $\mathbf{p}'$ dans l'espace vectoriel euclidien orienté P de dimension trois).

En déduire les parties réelle et pure du produit $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'$, où $\mathbf{q} = x_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}$ et $\mathbf{q}' = x'_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}'$, avec $x_0 \in \mathbf{R}$, $x'_0 \in \mathbf{R}$ et $\mathbf{p} \in \mathrm{P}$, $\mathbf{p}' \in \mathrm{P}$.

4° Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients *complexes* du type :

$$\mathrm{A}(z_0, z_1) = \begin{pmatrix} z_0 & -z_1 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_0 \end{pmatrix}$$

où z_0 et z_1 sont deux nombres complexes quelconques, et $\bar{z}_0$ et $\bar{z}_1$ leurs complexes conjugués.

a. Montrer que $\mathfrak{M}$, muni des lois habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire des matrices, est un espace vectoriel *réel* stable par le produit des matrices. Déterminer une base de $\mathfrak{M}$.

b. Soit ρ l'application de $\mathbf{H}$ dans $\mathfrak{M}$ qui à tout quaternion $\mathbf{q} = x_0 \mathbf{e} + x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$, avec x_0, x_1, x_2 et x_3 réels, associe la matrice $\mathrm{A}(z_0, z_1) \in \mathfrak{M}$, avec $z_0 = x_0 + i x_1 \in \mathbf{C}$ et $z_1 = x_2 + i x_3 \in \mathbf{C}$.

Montrer que ρ est une application $\mathbf{R}$-linéaire inversible telle que pour tout couple $(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ de quaternions on ait la relation $\rho(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}') = \rho(\mathbf{q}) \cdot \rho(\mathbf{q}')$.

II

On désigne par S la partie de $\mathbf{H}$ formée des quaternions de norme 1.

1° Montrer que S est un groupe pour le produit des quaternions.

2° Soit $\mathbf{q}$ un élément de S. On considère l'application $r_{\mathbf{q}}$ de P dans $\mathbf{H}$ qui à tout quaternion pur $\mathbf{p} \in \mathrm{P}$ associe le quaternion $r_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{q}}$.

a. Montrer que l'image de $r_{\mathbf{q}}$ est contenue dans P et que $r_{\mathbf{q}}$ est un endomorphisme orthogonal de P. Préciser $r_{\mathbf{q}}$ pour $\mathbf{q} = \mathbf{e}$ et $\mathbf{q} = -\mathbf{e}$.

b. On suppose que $\mathbf{q}$ est différent de $\mathbf{e}$ et $-\mathbf{e}$. Montrer que $\mathbf{q}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{q} = \cos\theta \cdot \mathbf{e} + \sin\theta \cdot \mathbf{u}$$

avec $0 < \theta < \pi$ et $\mathbf{u} \in \mathrm{S} \cap \mathrm{P}$.

Soient $\mathbf{v} \in \mathrm{P}$ et $\mathbf{w} \in \mathrm{P}$ deux quaternions purs tels que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ forme une base orthonormée directe de P. Écrire la matrice représentative de $r_{\mathbf{q}}$ dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ et en déduire que $r_{\mathbf{q}}$ appartient au groupe SO(3) des rotations de l'espace vectoriel euclidien orienté P.

3° Montrer que l'application r de S dans SO(3) qui à tout $\mathbf{q} \in \mathrm{S}$ associe $r_{\mathbf{q}}$ est un homomorphisme de groupes.

4° Réciproquement, soit $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ une base orthonormée directe de P, et soit R la rotation de P définie par $\mathrm{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $\mathrm{R}(\mathbf{v}) = \cos\varphi \cdot \mathbf{v} + \sin\varphi \cdot \mathbf{w}$, $\mathrm{R}(\mathbf{w}) = -\sin\varphi \cdot \mathbf{v} + \cos\varphi \cdot \mathbf{w}$. Déterminer tous les éléments $\mathbf{q}$ de S tels que $r_{\mathbf{q}} = \mathrm{R}$.